بررسی اثرات ناشی از ممان ژیروسکوپی برروی دینامیک و ارتعاشات یک جفت چرخ‌دندهٔ دومارپیچ سرعت بالا*

محمد کریمی خوزانی[۱] مهرداد پورسینا[۲] علی پورکمالی انارکی[۳]

چکیده در این تحقیق باارائهٔ یک مدل جرم گسستهٔ خطی مستقل از زمان در فضای سه‌بعدی برای یک جفت چرخ‌دندهٔ دومارپیچ به بررسی اثرات ناشی از ممان ژیروسکوپی برروی دینامیک و ارتعاشات این سیستم پرداخته می‌شود. در این مدل، هر چرخ‌دنده دارای شش درجه آزادی است و علاوه‌بر سفتی درگیری، سفتی ناشی از اثرات یاتاقان‌ها نیز درنظر گرفته می‌شود. پاسخ دینامیکی سیستم نسبت‌به تحریک ناشی از خطای انتقال بااستفاده از روش جمع مودال استخراج می‌گردد. نتایج این پژوهش نشان می‌دهد که ممان ژیروسکوپی باعث کاهش اکثر فرکانس‌های طبیعی سیستم می‌شود. علاوه‌براین، نتایج این تحقیق نشان می‌دهد که ممان ژیروسکوپی نقش بسیار مهمی برروی پاسخ دینامیکی یک جفت چرخ‌دندهٔ دومارپیچ در سرعت‌های بالا دارد. به‌منظور صحت‌سنجی معادلات و روش حل، پاسخ دینامیکی استخراج‌شده با نتایج تجربی حاصل از پژوهش‌های دیگر مقایسه می‌گردد.

واژه‌های کلیدی چرخ‌دندهٔ دومارپیچ؛ ممان ژیروسکوپی؛ سرعت بالا؛ مدل دینامیکی؛ ارتعاشات.

Effects of Gyroscopic Moment on the Dynamics and Vibrations of a High- Speed Double- Helical Gear Pair

M. Karimi Khoozani M. Poursina A. Pourkamali Anaraki

Abstract *In this research a linear time- invariant lumped mass model, LTI, in three-dimensional space for a double- helical gear pair is developed and effects of gyroscopic moment on the dynamics and vibrations are studied. In this model, each member has six degrees of freedom and both of the mesh stiffness and bearing stiffness are undertaken. The dynamic response due to transmission errors excitations is calculated by using the modal summation technique. The results of this research show that by taking the gyroscopic effects in double- helical gear pair, most of the natural frequencies are reduced. In addition, the gyroscopic moment have an important role on the dynamic response of high- speed double- helical gear pairs. In order to verify the equations and solution methodology, the obtained dynamic response from a pair of double- helical gear pair is compared with the empirical results of other researches.*

Key Words Double- helical gear; Gyroscopic moment; High- speed; Dynamic model; Vibration.

---

*تاریخ دریافت مقاله ۹۵/۱/۱۸ و تاریخ پذیرش آن ۹٦/۱/۱۴ می‌باشد. DOI: 10.22067/fum-mech.v29i1.54911

(۱) دانشجوی دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران.

(۲) نویسندهٔ مسئول: دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه اصفهان. Poursina@eng.ui.ac.ir

(۳) دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران.

مقدمه

چرخ‌دنده‌ها، از پرمصرف‌ترین قطعات در سیستم‌های انتقال قدرت و حرکت هستند. چرخ‌دنده‌ها برحسب موقعیت مکانی محورها نسبت به یکدیگر در شکل‌های گوناگونی طراحی و ساخته می‌شوند و حرکت چرخشی یک محور را به محور دیگر از طریق اتصال دندانه‌ها منتقل می‌کنند. چرخ‌دنده‌های ساده دارای دامنهٔ ارتعاشاتی بزرگ‌تری نسبت‌به چرخ‌دنده‌های مارپیچ هستند و رفتار غیرخطی شدیدتری دارند [1-6]. چرخ‌دنده‌های مارپیچ نیز علی‌رغم کوچک‌تر بودن دامنهٔ ارتعاشاتی نسبت به چرخ‌دنده‌های ساده، مشکل ایجاد نیروی محوری را که دراثر زاویهٔ مارپیچ حاصل می‌شود، دارند. ازاین‌رو برروی محور یک جفت چرخ‌دندهٔ مارپیچ، بایستی از یاتاقان‌هایی برای مهار این نیروی محوری استفاده شود. علاوه‌براین بدنهٔ چرخ‌دنده‌ها و محورهای نگهدارنده بایستی به‌قدری مستحکم باشند تا بتوانند درمقابل این نیروی محوری مقاومت کنند [7-12]. در این بین، چرخ‌دنده‌های دومارپیچ که بیشتر در توربوفن‌ها، هلی‌کوپترها و دیگر وسایل استفاده می‌شوند، مشکل ایجاد نیروی محوری را که در چرخ‌دنده‌های مارپیچی موجود می‌باشد، ندارند و نیروی محوری سمت چپ و راست این چرخ‌دنده‌ها همدیگر را خنثی می‌کنند. به‌علاوه چرخ‌دنده‌های دومارپیچ امکان انتقال بار بیشتری را نسبت به چرخ‌دنده‌های ساده و مارپیچ دارند. بنابراین استفاده از چرخ‌دنده‌های دومارپیچ باوجود هزینه‌های ساخت و همچنین سختی‌های تولید در حال افزایش است [13, 14].

منابع موجود در زمینهٔ دینامیک چرخ‌دنده‌های دومارپیچ بسیار محدود می‌باشد که درادامه به معرفی آنها پرداخته می‌شود. در بین منابع موجود، گروهی از آنها برروی مشخصه‌های توزیع بار شبه‌استاتیک برروی سطوح تماس در یک جفت چرخ‌دنده دومارپیچ متمرکز است [15, 16]. ازجمله نتایج این تحقیق‌ها استخراج یک مدل نیمه‌تحلیلی است که نشان می‌دهد بار انتقالی توسط دو نیمهٔ یک چرخ‌دندهٔ دومارپیچ به‌دقت ساخت دندانه‌ها و همچنین زوایهٔ بین دندانه‌های سمت چپ و راست حساس می‌باشند.

از میان پژوهش‌های بسیار محدود انجام‌شده در زمینهٔ دینامیک چرخ‌دنده‌های دومارپیچ، ژنگ [17] با توسعهٔ یک مدل المان محدود در فضای سه‌بعدی، به بهینه‌سازی صدای منتشرشده از یک جعبه‌دندهٔ دومارپیچ با محورهای موازی پرداخت. البته او در این تحقیق به بررسی تأثیر ضخامت پوستهٔ جعبه‌دنده برروی میزان کاهش صدای منتشرشده از آن پرداخته بود. ونگ و های تایو [18] نیز در تحقیقی برروی بهینه‌سازی پروفیل دندانه‌های یک جفت چرخ‌دنده دومارپیچ برای کاهش دادن خطای انتقال و متناسب با آن صدای منتشرشده از جعبه‌دنده تمرکز کرده بود.

کارهای تجربی انجام‌شده در زمینهٔ دینامیک چرخ‌دنده‌های دومارپیچ بسیار محدود می‌باشد. در همین راستا، کنگ و کهرمان [13] در پژوهش خود رفتار دینامیکی یک جفت چرخ‌دندهٔ دومارپیچ را به‌صورت تحلیلی و تجربی موردبررسی قرار دادند. آنها در روش تحلیلی خود با ارائهٔ یک مدل جرم گسستهٔ مستقل از زمان در فضای سه‌بعدی بدون درنظر گرفتن اثرات ژیروسکوپی پاسخ دینامیکی یک جفت چرخ‌دندهٔ دومارپیچ را به تحریک ناشی از خطای انتقال با نتایج تجربی مقایسه کردند و مدل خود را مورد‌ارزیابی قرار دادند.

برخی از تحقیق‌ها در زمینهٔ دینامیک چرخ‌دنده‌های دومارپیچ، درمورد سیستم‌های سیاره‌ای صورت گرفته است که در این قسمت به برخی از آنها نیز اشاره می‌شود. مدل جرم‌های گسسته یک سیستم سیاره‌ای دومارپیچ با بازوی ثابت توسط پرشند و کهرمان [14] استخراج شد. آنها در این تحقیق یک مدل دینامیکی خطی مستقل از زمان را برای یک مجموعه چرخ‌دندهٔ

سیاره‌ای دومارپیچ ارائه کردند. رابطه‌های ارائه‌شده در این مقاله به‌گونه‌ای است که اجازهٔ تحلیل یک مجموعه چرخ‌دندهٔ سیاره‌ای را با هر تعداد سیاره، هر تنظیم فاصله و هرگونه شرایط تکیه‌گاهی می‌دهد.

ونگ و همکاران [9] در پژوهش خود به تحلیل ضرایب توزیع بار دینامیکی در یک مجموعه چرخ‌دندهٔ سیاره‌ای دومارپیچ پرداختند. مدل استفاده‌شده در این تحقیق یک مدل جرم گسستهٔ پیچشی خالص می‌باشد. در واقع در این مقاله بار دینامیکی بین دندانه‌های درگیر با حل معادلهٔ حرکت بااستفاده از روش رانگ کوتای مرتبهٔ ٤ به‌دست آمده است.

شنگ [20] به‌تحلیل مودال یک سیستم چرخ‌دنده‌ای سیاره‌ای دومارپیچ با بازوی ثابت بااستفاده از مدل جرم‌های گسسته پرداخت. در مدل ارائه‌شده در این تحقیق برای هر یک از اجزای سیستم سه درجه آزادی انتقالی و یک درجه آزادی پیچشی درنظر گرفته شده بود.

با بررسی منابع و مراجع موجود در زمینهٔ دینامیک چرخ‌دنده‌های دومارپیچ، مشاهده می‌شود که جامع‌ترین مدل دینامیکی ارائه‌شده درمورد یک جفت چرخ‌دندهٔ دومارپیچ، مدل موجود در مرجع [13] می‌باشد. البته در این مرجع معادله‌ها برای حالتی استخراج شده است که اثرات ناشی از ممان ژیروسکوپی که در سرعت‌های بالا اهمیت دارد، درنظر گرفته نشده است. ازاین‌رو در تحقیق حاضر با ارائهٔ یک مدل جرم گسستهٔ خطی مستقل از زمان در فضای سه‌بعدی برای یک جفت چرخ‌دندهٔ دومارپیچ به بررسی اثرات ناشی از ممان ژیروسکوپی برروی دینامیک و ارتعاشات این سیستم پرداخته می‌شود. به‌همین‌منظور این مدل در دو سطح موردبررسی قرار می‌گیرد. در سطح اول از اثرات ژیروسکوپی صرف‌نظر می‌گردد و در سطح دوم، اثرات ناشی از ممان ژیروسکوپی درنظر گرفته می‌شود. در این مدل‌ها علاوه‌بر سفتی درگیری، سفتی ناشی از اثرات یاتاقان‌ها نیز درنظر گرفته می‌شود.

مدل دینامیکی

برای استخراج مدل در فضای سه‌بعدی، برای هر عضو شش درجه آزادی که شامل سه درجه آزادی انتقالی و سه درجه آزادی دورانی، می‌باشد، درنظر گرفته می‌شود. همچنین از فرضیه‌های زیر استفاده می‌گردد:

١) بدنهٔ تمامی چرخ‌دنده‌های درگیر به‌صورت جسم صلب فرض می‌شوند.

٢) انعطاف‌پذیری درگیری چرخ‌دنده‌ها توسط فنرهای خطی مدل می‌شوند که برروی صفحهٔ عمل عمود بر سطح دندانه‌های چرخ‌دنده اثر می‌کنند (با شیبی برابر با زاویهٔ مارپیچ β).

٣) از متغیر با زمان بودن سفتی درگیری به‌واسطهٔ تغییر در تعداد جفت دندانه‌های درگیر صرف‌نظر می‌شود [21, 22].

٤) فرض می‌شود دندانه‌های چرخ‌دنده در ناحیهٔ درگیری همیشه با یکدیگر تماس دارند و هیچ‌گونه جدایشی رخ نمی‌دهد.

٥) نیروی اصطکاکی که به‌واسطهٔ لغزش دندانه‌ها برروی یکدیگر به‌وجود می‌آید ناچیز فرض می‌شود [٢٣].

٦) سمت چپ و راست چرخ‌دنده‌های دومارپیچ به‌جز جهت دندانه‌ها که عکس یکدیگر می‌باشند، یکسان فرض می‌شود. زاویهٔ بین دندانه‌ها در تمام طول چرخ‌دنده یکسان فرض می‌شود و از خطاهای ساخت که ممکن است در این زمینه رخ بدهد صرف‌نظر شده است.

٧) در استخراج معادلات از میرایی سیستم صرف‌نظر می‌شود.

معادلات اساسی نیرو و گشتاور در فضای سه‌بعدی برای استخراج معادلات جفت چرخ‌دندهٔ درگیر به‌صورت زیر خواهند بود:

$$\sum F_y = ma_y \quad (١)$$

$$\sum F_x = ma_x \qquad (۲)$$

$$\sum F_z = ma_z \qquad (۳)$$

$$\sum M_y = I_y\ddot{\theta}_y \qquad (٤)$$

$$\sum M_x = I_x\ddot{\theta}_x \qquad (۵)$$

$$\sum M_z = J_z\ddot{\theta}_z \qquad (٦)$$

در روابط (٦-١)، m جرم، F_x، F_y، F_z، M_x، M_y، M_z، a_x، a_y، a_z، $\ddot{\theta}_x$، $\ddot{\theta}_y$، $\ddot{\theta}_z$، I_x، I_y، J_z به‌ترتیب مؤلفه‌های نیرو، مؤلفه‌های گشتاور، مؤلفه‌های شتاب خطی ناشی از ارتعاشات خطی، مؤلفه‌های شتاب زاویه‌ای ناشی از ارتعاشات زاویه‌ای و مؤلفه‌های ممان اینرسی در جهات x، y و z می‌باشند.

اثرات ناشی از ممان ژیروسکوپی نیز بایستی توسط روابط زیر در معادلات مربوط به یک جفت چرخ‌دندهٔ دومارپیچ درگیر وارد شوند. تکانهٔ زاویه‌ای یک جسم دوار $\varsigma(\varsigma = Pinion, Gear)$، که با سرعت زاویه‌ای ثابت $\Omega_\varsigma \mathbf{k}$ حول محور z در حال چرخش می‌باشد، بدون درنظر گرفتن حرکات انحرافی (یعنی چرخش فقط در صفحهٔ دوران باشد) برابر است با:

$$\mathbf{H}_\varsigma = J_\varsigma \Omega_\varsigma \mathbf{k} \qquad (\varsigma = Pinion, Gear) \qquad (۷)$$

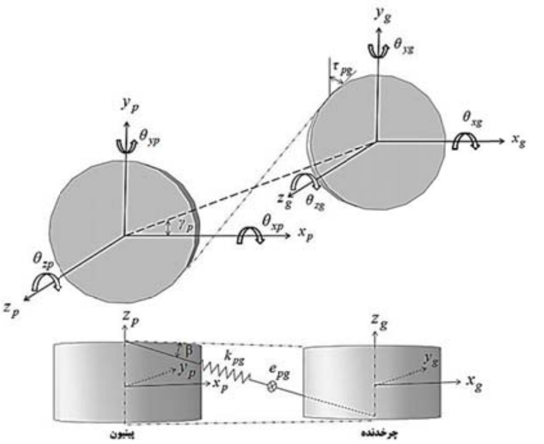
بردار سرعت زاویه‌ای برای یک جسم مشابه را به واسطهٔ حرکات دورانی و انحرافی می‌توان مطابق رابطهٔ زیر به‌دست آورد:

$$\omega_\varsigma = \dot{\theta}_{x\varsigma}\mathrm{i} + \dot{\theta}_{y\varsigma}\mathrm{j} + (\dot{\theta}_{z\varsigma} + \Omega_\varsigma)\mathrm{k} \quad (\varsigma = \mathrm{Pinion, Gear}) \qquad (۸)$$

در رابطهٔ بالا $\dot{\theta}_{x\varsigma}$، $\dot{\theta}_{y\varsigma}$ و $\dot{\theta}_{z\varsigma}$ به‌ترتیب سرعت‌های ارتعاشی درجهت محورهای x، y و z می‌باشند. براساس اصل پایستگی تکانهٔ زاویه‌ای، نرخ تغییرات در تکانهٔ زاویه‌ای به‌واسطهٔ حرکات انحرافی منجر به ایجاد گشتاور $\mathbf{M}_\varsigma$ می‌شود که برابر است با:

$$\mathbf{M}_\varsigma = \dot{\mathbf{H}}_\varsigma + \boldsymbol{\omega}_\varsigma \times \mathbf{H}_\varsigma \Rightarrow \mathbf{M}_\varsigma = J_\varsigma \Omega_\varsigma \dot{\theta}_{y\varsigma}\mathbf{i} - J_\varsigma \Omega_\varsigma \dot{\theta}_{x\varsigma}\mathbf{j} \quad (\varsigma = Pinion, Gear) \qquad (۹)$$

حال با قرار دادن روابط (۹-۷) در معادلات (٦-١) و بسط دادن آنها، معادلات دینامیکی برای یک سمت از جفت چرخ‌دندهٔ درگیر دومارپیچ استخراج می‌گردد. شکل (١) نشان‌دهندهٔ یک سمت از جفت چرخ‌دندهٔ دومارپیچ درگیر می‌باشد که نسبت به هم در موقعیت زاویه‌ای γ_p قرار گرفته‌اند.



شکل ١ مدل دینامیکی یک سمت از جفت چرخ‌دندهٔ دومارپیچ درگیر

همان‌طور که در این شکل نشان داده شده است، صفحهٔ عمل بین دو چرخ‌دنده با محور y زاویه τ_{pg} می‌سازد که می‌توان آن را از رابطهٔ زیر محاسبه کرد [14]:

$$\tau_{pg} = \begin{cases} \Phi_{pg} - \gamma_p, T_p : CCW \\ -\Phi_{pg} - \gamma_p, T_p : CW \end{cases} \qquad (١٠)$$

در رابطهٔ بالا Φ_{pg} زاویهٔ فشار عرضی و T_p گشتاور خارجی اعمال شده بر چرخ‌دندهٔ پینیون می‌باشد. معادلات حرکت برای جفت چرخ‌دندهٔ درگیر در حالت بدون میرایی و با درنظر گرفتن اثرات

ژیروسکوپی و همچنین اثرات سفتی ناشی از یاتاقان‌ها، و بااستفاده از معادلات ارائه‌شده در مرجع [14] به‌دست خواهد آمد. معادلات حرکت برای پینیون به‌صورت زیر می‌باشد:

$$m_p \ddot{y}_p(t) + k_{yp} y_p(t) + k_{pg} P_{pg}(t) \cos\beta \cos\tau_{pg} = 0 \qquad (۱۱)$$

$$m_p \ddot{x}_p(t) + k_{xp} x_p(t) + k_{pg} P_{pg}(t) \cos\beta \sin\tau_{pg} = 0 \qquad (۱۲)$$

$$m_p \ddot{z}_p(t) + k_{zp} z_p(t) - k_{pg} P_{pg}(t) \sin\beta = 0 \qquad (۱۳)$$

$$I_{yp}\ddot{\theta}_{yp}(t) + J_p \Omega_p \dot{\theta}_{xp}(t) + k_{\theta yp}\theta_{yp}(t) + k_{pg} P_{pg}(t) r_p \sin\beta \cos\tau_{pg} = 0 \qquad (۱٤)$$

$$I_{xp}\ddot{\theta}_{xp}(t) - J_p \Omega_p \dot{\theta}_{yp}(t) + k_{\theta xp}\theta_{xp}(t) + k_{pg} P_{pg}(t) r_p \sin\beta \sin\tau_{pg} = 0 \qquad (۱٥)$$

$$J_p \ddot{\theta}_{zp}(t) + k_{pg} P_{pg}(t) r_p \cos\beta = \frac{T_p}{2} \qquad (۱٦)$$

به‌طریق مشابه معادلات حرکت برای چرخ‌دنده به‌صورت زیر خواهد شد:

$$m_g \ddot{y}_g(t) + k_{yg} z_g(t) - k_{pg} P_{pg}(t) \cos\beta \cos\tau_{pg} = 0 \qquad (۱۷)$$

$$m_g \ddot{x}_g(t) + k_{xg} z_g(t) - k_{pg} P_{pg}(t) \cos\beta \sin\tau_{pg} = 0 \qquad (۱۸)$$

$$m_g \ddot{z}_g(t) + k_{zg} z_g(t) + k_{pg} P_{pg}(t) \sin\beta = 0 \qquad (۱۹)$$

$$I_{yg}\ddot{\theta}_{yg}(t) - J_g \Omega_g \dot{\theta}_{xg}(t) + k_{\theta yg}\theta_{yg}(t) + k_{pg} P_{pg}(t) r_g \sin\beta \cos\tau_{pg} = 0 \qquad (۲۰)$$

$$I_{xg}\ddot{\theta}_{xg}(t) + J_g \Omega_g \dot{\theta}_{yg}(t) + k_{\theta xg}\theta_{xg}(t) + k_{pg} P_{pg}(t) r_g \sin\beta \sin\tau_{pg} = 0 \qquad (۲۱)$$

$$J_g \ddot{\theta}_{zg}(t) + k_{pg} P_{pg}(t) r_g \cos\beta = \frac{T_g}{2} \qquad (۲۲)$$

در روابط بالا زیرنویس p نشان‌دهندهٔ پینیون، زیرنویس g نشان‌دهندهٔ چرخ‌دنده، β زاویهٔ مارپیچ، r شعاع مبنای چرخ‌دنده، k_{pg} سفتی درگیری میانگین بین جفت چرخ‌دندهٔ درگیر، k_x، k_y، k_z، $k_{\theta x}$، $k_{\theta y}$ و $k_{\theta z}$ به‌ترتیب سفتی یاتاقان در جهات x، y، z، θ_x، θ_y و θ_z و $P_{pg}(t)$ جابه‌جایی نسبی بین دو چرخ‌دنده است که از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$P_{pg}(t) = [(y_p - y_g)\cos\tau_{pg} + (x_p - x_g)\sin\tau_{pg} + (r_p\theta_{zp} + r_g\theta_{zg})]\cos\beta + [(r_p\theta_{yp} + r_g\theta_{yg})\cos\tau_{pg} + (r_p\theta_{xp} + r_g\theta_{xg})\sin\tau_{pg} + (-z_p + z_g)]\sin\beta - e_{pg}(t) \qquad (۲۳)$$

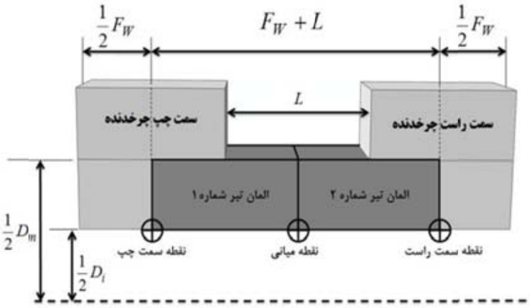
در رابطهٔ (۲۳)، $e_{pg}(t)$ تحریک ناشی از خطای انتقال استاتیکی می‌باشد. بازنویسی معادلات (۱۱-۲۳) در فرم ماتریسی، رابطهٔ زیر را نتیجه می‌دهد:

$$\begin{bmatrix} \mathrm{M_p} & 0 \\ 0 & \mathrm{M_g} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathrm{q}}_\mathrm{p}(\mathrm{t}) \\ \ddot{\mathrm{q}}_\mathrm{g}(\mathrm{t}) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathrm{G_p} & 0 \\ 0 & \mathrm{G_g} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathrm{q}}_\mathrm{p}(\mathrm{t}) \\ \dot{\mathrm{q}}_\mathrm{g}(\mathrm{t}) \end{Bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} \mathrm{k_{bp}} & 0 \\ 0 & \mathrm{k_{bg}} \end{bmatrix} + \mathrm{k_{pg}} \begin{bmatrix} \mathrm{K_{pg}^{11}} & \mathrm{K_{pg}^{12}} \\ \mathrm{sym.} & \mathrm{K_{pg}^{22}} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \mathrm{q_p(t)} \\ \mathrm{q_g(t)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathrm{f_{pm}} + \mathrm{f_p(t)} \\ \mathrm{f_{gm}} + \mathrm{f_g(t)} \end{Bmatrix} \qquad (۲٤)$$

ترکیب معادلات سمت چپ و راست

معادلاتی که در قسمت قبلی برای جفت چرخ‌دندهٔ درگیر ارائه شدند، معادلات مربوط به یک سمت از چرخ‌دنده‌های درگیر می‌باشند. حال از آنجایی که سمت چپ و راست این چرخ‌دنده‌ها طبق فرضیهٔ شمارهٔ شش، با یکدیگر مشابه‌اند، می‌توان معادلات استخراج‌شده برای یک طرف را به طرف مقابل نیز تعمیم داد. سپس بایستی معادلات دو طرف را با یکدیگر ترکیب کرد تا معادلات کلی سیستم به‌دست آید. به‌همین‌منظور، بااستفاده از روش المان محدود و به‌کمک المان‌های تیر اویلر مشابه با روشی که قبلاً اجمی و ولکس [24] در تحقیق خود انجام داده بودند،

ماتریس ضرایب با یکدیگر ترکیب می‌شوند تا ماتریس‌های کلی سیستم استخراج گردد. همان‌طور که در شکل (۲) نشان داده شده است، یک چرخ‌دنده دومارپیچ شامل سه قسمت اصلی می‌باشد: ۱- یک چرخ‌دندهٔ مارپیچ در سمت چپ با قطر داخلی D_i. ۲- یک چرخ‌دندهٔ مارپیچ در سمت راست با قطر داخلی D_i. ۳- قسمت رابط با قطر خارجی D_m که متصل‌کننده چرخ‌دنده‌های مارپیچ سمت چپ و راست می‌باشد.



شکل ۲ مدل المان محدود یک چرخ‌دندهٔ دومارپیچ برای ترکیب معادلات سمت چپ و راست

در شکل (۲) تقسیم‌بندی چرخ‌دنده به سه قسمت به‌گونه‌ای صورت گرفته است که جرم و ممان اینرسی هر قسمت برابر با مجموع جرم و ممان اینرسی سمت چپ، سمت راست و قسمت رابط چرخ‌دندهٔ دومارپیچ می‌باشد. بدین ترتیب ماتریس‌های کلی جرم و سفتی برای المان‌های نشان داده شده در شکل (۲) از روابط زیر به‌دست می‌آیند:

$$K_{\varsigma e} = \begin{Bmatrix} K^{11}_{\varsigma e1} & K^{12}_{\varsigma e1} & 0 \\ & K^{22}_{\varsigma e1} + K^{11}_{\varsigma e2} & K^{12}_{\varsigma e2} \\ \text{Sym.} & & K^{22}_{\varsigma e2} \end{Bmatrix} \qquad (۲۵)$$

$$M_{\varsigma e} = \begin{Bmatrix} M^{11}_{\varsigma e1} & M^{12}_{\varsigma e1} & 0 \\ & M^{22}_{\varsigma e1} + M^{11}_{\varsigma e2} & M^{12}_{\varsigma e2} \\ \text{Sym.} & & M^{22}_{\varsigma e2} \end{Bmatrix} \qquad (۲۶)$$

در روابط (۲۵ و ۲۶)، $\varsigma = Pinion, Gear$ می‌باشد. بردار جابه‌جایی متناظر با ماتریس‌های جرم و سفتی ارائه شده در روابط بالا، به‌صورت زیر می‌باشد:

$$q_{\varsigma e} = \begin{Bmatrix} (q_\varsigma)_L \\ (q_\varsigma)_M \\ (q_\varsigma)_R \end{Bmatrix} \qquad (۲۷)$$

در رابطهٔ (۲۷) زیرنویس‌های L، M و R به‌ترتیب نشان‌دهندهٔ نقطهٔ سمت چپ، نقطهٔ میانی و نقطهٔ سمت راست هر عضو می‌باشد.

معادلات کلی سیستم

در این مرحله بایستی مجموعه معادلات رابطهٔ (۲٤) را بااستفاده از معادلات (۲۵ و ۲٦) برای سمت چپ و راست چرخ‌دنده‌های درگیر با یکدیگر ترکیب کرد تا معادلات کلی سیستم استخراج گردد. با انجام این کار مجموعه معادلات کلی سیستم با درنظر گرفتن ۳٦ درجه آزادی در قالب ماتریسی به فرم زیر درخواهد آمد:

$$M\ddot{q}(t) + G\dot{q}(t) + (K_m + K_b)q(t) = F(t) \qquad (۲۸)$$

در رابطهٔ بالا، M ماتریس جرم، G ماتریس ژیروسکوپی، K_m ماتریس سفتی درگیری، K_b ماتریس سفتی ناشی از یاتاقان‌ها، F(t) بردار تحریک ناشی از گشتاورهای خارجی و تحریک ناشی از خطای انتقال استاتیکی و q(t) بردار جابه‌جایی می‌باشند و از روابط زیر محاسبه می‌گردند:

$$M = \begin{bmatrix} M^{11}_{pe1} + (M_p)_L & M^{12}_{pe1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & M^{22}_{pe1} + M^{11}_{pe2} & M^{12}_{pe2} & 0 & 0 & 0 \\ & & M^{22}_{pe2} + (M_p)_R & 0 & 0 & 0 \\ & & & M^{11}_{ge1} + (M_g)_L & M^{12}_{ge1} & 0 \\ & & & & M^{22}_{ge1} + M^{11}_{ge2} & M^{12}_{ge2} \\ & & & \text{Sym} & & M^{22}_{ge2} + (M_g)_R \end{bmatrix} \qquad (۲۹)$$

$$G=\begin{bmatrix} G_{pe1}^{11}+(G_p)_L & G_{pe1}^{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & G_{pe1}^{22}+G_{pe2}^{11} & G_{pe2}^{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & G_{pe2}^{22}+(G_p)_R & 0 & 0 & 0 \\ & & & G_{ge1}^{11}+(G_g)_L & G_{ge1}^{12} & 0 \\ & & & & G_{ge1}^{22}+G_{ge2}^{11} & G_{ge2}^{12} \\ \text{SkewSym.} & & & & & G_{ge2}^{22}+(G_g)_R \end{bmatrix} \qquad (۳۰)$$

$$K_m=\begin{bmatrix} K_{pe1}^{11}+(K_{pg}^{11})_L & K_{pe1}^{12} & 0 & (K_{pg}^{12})_L & 0 & 0 \\ & K_{pe1}^{22}+K_{pe2}^{11} & K_{se2}^{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & K_{pe2}^{22}+(K_{pg}^{11})_R & 0 & 0 & (K_{pg}^{12})_L \\ & & & K_{ge1}^{11}+(K_{pg}^{11})_L & K_{ge1}^{12} & 0 \\ & & & & K_{ge1}^{22}+K_{ge2}^{11} & K_{ge2}^{12} \\ \text{Sym} & & & & & K_{ge2}^{22}+(K_{pg}^{11})_R \end{bmatrix} \qquad (۳۱)$$

$$K_b=\mathrm{Diag}\begin{bmatrix}0 & K_{bp} & 0 & 0 & K_{bg} & 0\end{bmatrix} \qquad (۳۲)$$

$$K_{b\varsigma}=\mathrm{Diag}\begin{bmatrix}K_{y\varsigma} & K_{x\varsigma} & K_{z\varsigma} & K_{\theta y\varsigma} & K_{\theta x\varsigma} & K_{\theta z\varsigma}\end{bmatrix}(\varsigma=\text{Pinion, Gear}) \qquad (۳۳)$$

$$q_\varsigma(t)=\begin{Bmatrix} y_\varsigma(t) \\ x_\varsigma(t) \\ z_\varsigma(t) \\ \theta_{y\varsigma}(t) \\ \theta_{x\varsigma}(t) \\ \theta_{z\varsigma}(t) \end{Bmatrix} \quad (\varsigma=\text{Pinion, Gear}) \qquad (۳٤)$$

$$f_{pm}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{T_p}{2} \end{Bmatrix}, f_{gm}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{T_g}{2} \end{Bmatrix},$$

$$f_p(t)=k_{pg}e_{pg}(t)\begin{Bmatrix} \cos\beta\cos\tau_{pg} \\ \cos\beta\cos\tau_{pg} \\ \sin\beta \\ r_p\sin\beta\cos\tau_{pg} \\ r_p\sin\beta\sin\tau_{pg} \\ r_p\cos\beta \end{Bmatrix}, \qquad (۳۵)$$

$$f_g(t)=k_{pg}e_{pg}(t)\begin{Bmatrix} -\cos\beta\cos\tau_{pg} \\ -\cos\beta\sin\tau_{pg} \\ \sin\beta \\ r_g\sin\beta\cos\tau_{pg} \\ r_g\sin\beta\sin\tau_{pg} \\ r_g\cos\beta \end{Bmatrix}$$

در معادلهٔ (۳۵)، بردار نیروی $\mathbf{f}(t)$ شامل تحریک ناشی از خطای انتقال است که به‌عنوان بخشی از جابه‌جایی نسبی در معادلهٔ (۲۳) داده شده است. برای محاسبهٔ تحریک ناشی از خطای انتقال، درگیری سمت چپ چرخ‌دنده‌های درگیر را به‌عنوان درگیری مرجع درنظر بگیرید. در این صورت تحریک ناشی از خطای انتقال در این درگیری در قالب سری فوریه به‌شکل زیر درخواهد آمد [14]:

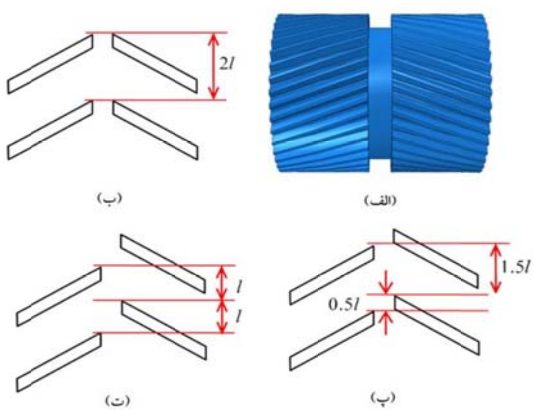
$$e_{pg}^{(L)}(t)=\sum_{l=1}^{L}\hat{e}_{pgl}^{(L)}\cos(lf_m t+\sigma_{pgl}^{(L)}) \qquad (۳٦)$$

در رابطهٔ (۳٦)، $\hat{e}_{pgl}$ و σ_{pgl} به‌ترتیب اندازهٔ بزرگی و زاویهٔ فاز هارمونیک lام این تحریک خواهند بود که بااستفاده از نرم‌افزار LDP محاسبه می‌شوند [25]. f_m فرکانس درگیری چرخ‌دنده‌ها است و بالانویس L نیز نشان‌دهندهٔ سمت چپ چرخ‌دنده‌های درگیر می‌باشد.

با تعریف زاویهٔ فاز متناوب (γ_{stg}) بین سمت

چپ و راست چرخ‌دنده‌های درگیر مطابق شکل (۳)، تحریک ناشی از خطای انتقال برای درگیری سمت راست چرخ‌دنده‌های درگیر به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$e_{pg}^{(R)}(t)=\sum_{l=1}^{L}\hat{e}_{pgl}^{(R)}\cos(lf_m t+\sigma_{pgl}^{(R)}+l\gamma_{stg}) \qquad (۳۷)$$



شکل ۳ (الف) نمای کلی یک چرخ‌دندهٔ دومارپیچ، (ب) زاویهٔ فاز متناوب $\gamma_{stg}=0$، (پ) زاویهٔ فاز متناوب $\gamma_{stg}=\frac{\pi}{2}$، (ت) زاویه فاز متناوب $\gamma_{stg}=\pi$

روش حل معادلات

در این قسمت روش حل معادلات برای دو حالت زیر شرح داده می‌شود:

حالت اول: از اثرات ژیروسکوپی در معادلات صرف‌نظر شده است. در این حالت، ابتدا با قرار دادن $F(t)=0$ در معادلهٔ (۲۸) و با صرف‌نظر کردن از ماتریس G که ناشی از اثرات ژیروسکوپی می‌باشد، معادلهٔ کلی سیستم به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$M\ddot{q}(t)+(K_m+K_b)q(t)=0 \qquad (۳۸)$$

با حل مسأله مقدار ویژهٔ متناظر با معادلهٔ (۳۸)، که به‌شکل $KQ=\omega^2 MQ$، که در آن $K=K_m+K_b$ می‌باشد، مقادیر ویژهٔ ω_λ و بردارهای ویژهٔ نرمال Q_λ سیستم محاسبه می‌شوند. پاسخ سیستم به تحریک‌های ناشی از خطای انتقال را می‌توان بااستفاده از روش جمع مودال به‌دست آورد. براین‌اساس اگر نیروی وارد بر سیستم به‌صورت زیر درنظر گرفته شود (هر نیرو در اثر تحریک ناشی از درگیری یک سمت چرخ‌دنده‌ها به‌وجود آمده است) [13]:

$$\mathbf{F}(t)=\mathbf{F}_L(t)+\mathbf{F}_R(t)=\widetilde{\mathbf{F}}_L k_{pg} e_{pg}^{(L)}(t)+\widetilde{\mathbf{F}}_R k_{pg} e_{pg}^{(R)}(t) \qquad (۳۹)$$

پاسخ سیستم به هر نیروی $\mathbf{F}_L(t)$ و $\mathbf{F}_R(t)$ از روش جمع مودال به‌صورت زیر به‌دست می‌آید [26]:

$$\mathbf{q}_L(t)=\widetilde{\mathbf{F}}_L k_{pg}\sum_{l=1}^{L}\sum_{\lambda=1}^{N_{dof}}\Theta_{\lambda l}(jf_m)\hat{e}_{pgl}^{(L)}\cos(lf_m t+\sigma_{pgl}^{(L)}),\qquad (j=\sqrt{-1}) \qquad (٤٠)$$

$$\mathbf{q}_R(t)=\widetilde{\mathbf{F}}_R k_{pg}\sum_{l=1}^{L}\sum_{\lambda=1}^{N_{dof}}\Theta_{\lambda l}(jf_m)\hat{e}_{pgl}^{(R)}\cos(lf_m t+\sigma_{pgl}^{(R)}+l\gamma_{stg}),\qquad (j=\sqrt{-1}) \qquad (٤١)$$

در روابط بالا $\widetilde{F}_L$ و $\widetilde{F}_R$ به‌ترتیب اندازهٔ بزرگی نیروی سمت چپ و راست و $\Theta_{\lambda l}(jf_m)$ نیز از رابطهٔ (٤٢) محاسبه می‌شود:

$$\Theta_{\lambda l}(jf_m)=\frac{\mathbf{Q}_\lambda \mathbf{Q}_\lambda^T}{(\omega_\lambda^2-l^2 f_m^2)} \qquad (٤٢)$$

جابه‌جایی کلی نیز به‌دلیل خطی بودن سیستم، از جمع جابه‌جایی‌های حاصل‌شده از هر تحریک در حالت پایا به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\mathbf{q}(t)=\mathbf{q}_L(t)+\mathbf{q}_R(t) \qquad (٤٣)$$

حالت دوم: اثـرات ژیروسـکوپی نیـز در معـادلات درنظر گرفته شده است. برای حل معـادلات در ایـن حالت، ابتدا بایستی معادلهٔ (۲۸) را مطابق رابطهٔ زیر در فضای حالت بیان کرد:

$$\dot{\mathrm{r}}(\mathrm{t}) = \mathrm{Ar}(\mathrm{t}) + \mathrm{BF}(\mathrm{t}) \qquad (٤٤)$$

در رابطهٔ (٤٤)، $\mathrm{r(t)}$ بردار حالت و ماتریس‌هـای A و B به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\mathrm{r}(\mathrm{t}) = \begin{Bmatrix} \mathrm{q}(\mathrm{t}) \\ \dot{\mathrm{q}}(\mathrm{t}) \end{Bmatrix} \qquad (٤٥)$$

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{I} \\ -\mathrm{M}^{-1}\mathrm{K} & -\mathrm{M}^{-1}\mathrm{G} \end{bmatrix} \qquad (٤٦)$$

$$\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathrm{M}^{-1} \end{bmatrix} \qquad (٤٧)$$

در رابطـهٔ (٤٦)، مـاتریس I مـاتریس همـانی بـا ابعادی برابر با تعداد درجه آزادی سیستم می‌باشد. حال با قرار دادن مقـدار بـردار $\mathrm{F(t)} = 0$ در معادلـهٔ (٤٤)، مسئلهٔ مقدار ویـژهٔ سیسـتم مـوردنظر بـه‌صـورت زیـر درمی‌آید:

$$\mathrm{AR} = \Lambda\mathrm{R} \qquad \text{or} \qquad \mathrm{L}^{\mathrm{T}}\mathrm{A} = \Lambda\mathrm{L}^{\mathrm{T}} \qquad (٤٨)$$

در رابطهٔ (٤٨)، Λ مـاتریس مقـادیر ویـژه، R و L به‌ترتیب بـردار ویـژه‌هـای سـمت راسـت و چـپ می‌باشند. مـاتریس‌هـای مـودال R و L بـر یکـدیگر متعامدنـــد بـــه‌گونـــه‌ای کـــه روابـــط $\mathrm{L}^{\mathrm{T}}\mathrm{R} = \mathrm{I}$ و $\mathrm{L}^{\mathrm{T}}\mathrm{AR} = \Lambda$ بین آنها برقرار اسـت. مقـادیر ویـژه در این‌گونه مسایل به‌صورت جفت‌هـای مـزدوج مخـتلط می‌باشند. بنابراین λامین مقدار ویـژه $\Lambda_\lambda(j\Omega)$ (یـا λامین مقدار ویژهٔ مزدوج مخـتلط $\overline{\Lambda}_\lambda(j\Omega)$) کـه از معادلهٔ (٤٨) حاصل می‌شود، مورداستفاده قرار می‌گیـرد تـا λامـین فرکـانس طبیعـی سیسـتم از رابطـهٔ (٤٩) به‌دست آید:

$$\omega_\lambda = \left| imag[\Lambda_\lambda(j\Omega)] \right| = \left| imag[\overline{\Lambda}_\lambda(j\Omega)] \right| \qquad (٤٩)$$

مقـادیر ویـژه و بردارهـای ویـژه در ایـن سیسـتم وابسته به سرعت می‌باشد.

مشابه حالت قبلی، پاسخ سیستم بـه تحریـک‌هـای ناشی از خطای انتقـال را مـی‌تـوان بااسـتفاده از روش جمع مودال به‌دسـت آورد. مجمـوع نیروهـای وارد بـر سیستم نیز بااستفاده از رابطـهٔ (۳۹) محاسـبه مـی‌شـود. پاسخ سیستم به هـر نیـروی $\mathbf{F}_L(t)$ و $\mathbf{F}_R(t)$ از روش جمع مودال به‌صورت زیر به‌دست می‌آید [26]:

$$\mathbf{r}_L(t) = \widetilde{\mathbf{F}}_L k_{pg} \sum_{l=1}^{L} \sum_{\lambda=1}^{2N_{dof}} \hat{\Theta}_{\lambda l}(jf_m)\hat{e}_{pgl}^{(L)} \cos(lf_m t + \sigma_{pgl}^{(L)}), \quad (j = \sqrt{-1}) \qquad (٥٠)$$

$$\mathbf{r}_R(t) = \widetilde{\mathbf{F}}_R k_{pg} \sum_{l=1}^{L} \sum_{\lambda=1}^{2N_{dof}} \hat{\Theta}_{\lambda l}(jf_m)\hat{e}_{pgl}^{(R)} \cos(lf_m t + \sigma_{pgl}^{(R)} + l\gamma_{stg}), \quad (j = \sqrt{-1}) \qquad (٥١)$$

در روابط بالا، $\hat{\Theta}_{\lambda l}(jf_m)$ از معادله زیر بـه‌دسـت می‌آید:

$$\hat{\Theta}_{\lambda l}(jf_m) = \frac{\mathbf{L}_\lambda^T \mathbf{B} \mathbf{R}_\lambda}{jlf_m - \Lambda_\lambda} \qquad (٥٢)$$

جابه‌جایی کلی نیز به‌دلیل خطی بـودن سیسـتم، از جمع جابه‌جایی‌هـای حاصـل‌شـده از هـر تحریـک در حالت پایا به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_L(t) + \mathbf{r}_R(t) \qquad (٥٣)$$

صحت‌سنجی معادلات و روش حـل آنهـا. در ایـن بخش به‌منظور صحت‌سنجی، معـادلات اسـتخراج‌شـده برای یک جفت چرخ‌دندهٔ دومارپیچ حـل مـی‌شـوند و نتایج با نتایج تجربی داده‌شـده در مرجـع [13] مقایسـه می‌گردند. اطلاعات اساسی مربوط به جفت چرخ‌دنـدهٔ

دومارپیچ درگیر، در جدول (۱) بیان شده است. جدول (۲) نیز ضرایب استفاده‌شده در بسط سری فوریه تحریک ناشی از خطای انتقال را نشان می‌دهد.

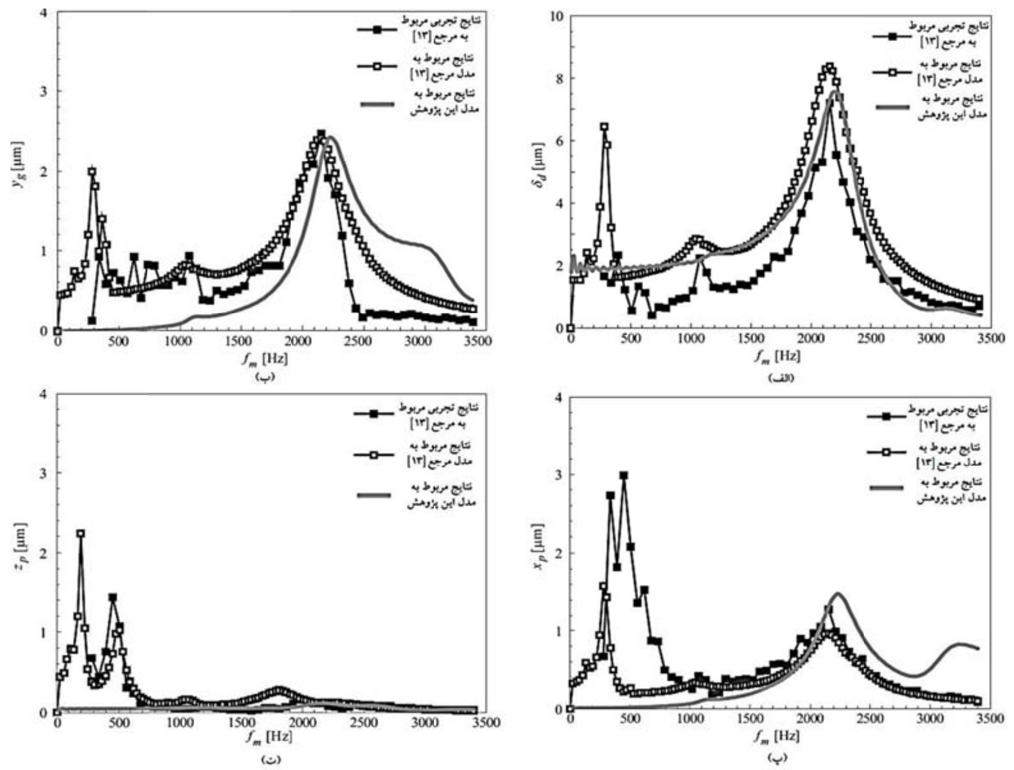
معادلات مربوط به یک جفت چرخ‌دندهٔ دومارپیچ درگیر بااستفاده از روش جمع مودال حل می‌شوند. شکل (٤) مقایسهٔ نتایج به‌دست آمده از حل معادلات را با نتایج ارائه‌شده در مرجع [13] نشان می‌دهد.

جدول ۱ پارامترهای اساسی مربوط به جفت چرخ‌دنده دومارپیچ درگیر [13]

پارامتر	پینیون	چرخ‌دنده
جرم (kg)	۲/۳۱	۳/۰٤
تعداد دندانه‌ها	۳۱	۳٤
مدول نرمال (mm)	۳/۹۱۵	
زاویهٔ فشار نرمال (deg)	۲۲/۵	
فاصله مرکز تا مرکز چرخ‌دنده‌ها (mm)	۱۵۰	
زاویهٔ مارپیچ (deg)	±۳۵	±۳۵
قطر پایه (mm)	۱٤٥/۰۳	۱۳۲/۲۳
قطر بزرگ (mm)	۱٦٦/٥۲	۱٥۲/٦۸
سفتی درگیری (N/m)	۲/۲×۱۰^{۸}	
سفتی یاتاقان درجهت x و y (N/m)	٦×۱۰^{۷}	٦×۱۰^{۷}
سفتی یاتاقان درجهت z (N/m)	۲/٥×۱۰^{۷}	۲/٥×۱۰^{۷}
سفتی یاتاقان درجهت θ_x و θ_y (N.m/rad)	٦×۱۰^{٥}	٦×۱۰^{٥}
سفتی یاتاقان درجهت θ_z (N.m/rad)	۰	۰

جدول ۲ ضرایب بسط سری فوریه تحریک ناشی از خطای انتقال [13]

ضرایب	مقدار
$\hat{e}_{pg1}^{(L)}(\mu m)$	۲/٤٦
$\sigma_{pg1}^{(L)}(\mathrm{deg})$	−٤٥/۷۷
$\hat{e}_{pg2}^{(L)}(\mu m)$	۰/٤٤
$\sigma_{pg2}^{(L)}(\mathrm{deg})$	۸۲/۷
$\hat{e}_{pg1}^{(R)}(\mu m)$	۲/٤۸
$\sigma_{pg1}^{(R)}(\mathrm{deg})$	−٥۸/٥۸
$\hat{e}_{pg2}^{(R)}(\mu m)$	۰/۳۸
$\sigma_{pg2}^{(R)}(\mathrm{deg})$	٦٤/۱٥
$\gamma_{stg}(\mathrm{deg})$	۰



شکل ٤ مقایسهٔ نتایج حاصل از حل معادلات دینامیکی با نتایج ارائه‌شده در مرجع [13] برای یک جفت چرخ‌دندهٔ دومارپیچ درگیر درمقابل فرکانس درگیری (الف) خطای انتقال دینامیکی، (ب) جذر میانگین مربعات دامنهٔ ارتعاشات چرخ‌دنده درجهت y، (پ) جذر میانگین مربعات دامنهٔ پینیون ارتعاشات درجهت x، (ت) جذر میانگین مربعات دامنهٔ ارتعاشات پینیون درجهت z

مقایسهٔ نتایج ارائه‌شده در شکل (٤) و نزدیک بودن پاسخ‌های ارائه‌شده در این شکل، درستی معادلات و روش حل استفاده‌شده در این تحقیق را نشان می‌دهد. البته در بعضی از نقاط اختلافات محدودی وجود دارد که این امر نیز به‌دلیل مشخص نبودن برخی از پارامترها در مرجع [13] و فرض کردن آنها در این تحقیق می‌باشد. البته در مرجع [13] سفتی شافت نیز درنظر گرفته شده است. اما به‌دلیل مشخص نبودن پارامترهای مربوط به شافت در مرجع [13]، در این تحقیق از آن صرف‌نظر گردید و همین امر باعث شده است که در فرکانس‌های پایین اختلاف بین نتایج بیشتر شود. حال که صحت معادلات و روش حل استفاده‌شده موردتأیید قرار گرفت، می‌توان این معادلات را با درنظر گرفتن اثرات ناشی از ممان ژیروسکوپی نیز حل کرد و دینامیک و ارتعاشات آن را موردبررسی قرار داد.

نتایج

در جدول (۲) فرکانس‌های طبیعی یک جفت چرخ‌دندهٔ دومارپیچ که مشخصات اساسی آن در بخش قبلی بیان شد، در دو حالت مختلف ارائه شده است.

مقایسهٔ فرکانس‌های طبیعی ارائه‌شده در جدول (۳) نشان می‌دهد که با درنظر گرفتن اثرات ژیروسکوپی، سیستم دارای مود صلب خواهد شد. زیرا یکی از فرکانس‌های طبیعی سیستم با درنظر گرفتن اثرات ژیروسکوپی صفر می‌شود. به‌علاوه با درنظر گرفتن اثرات ژیروسکوپی، بیشتر فرکانس‌های طبیعی سیستم کاهش می‌یابد. البته درصد کاهش در فرکانس‌های طبیعی اولیهٔ سیستم بیشتر است و با افزایش مقدار فرکانس طبیعی، این درصد کمتر می‌شود. زیرا فرکانس‌های طبیعی اولیهٔ سیستم ازنظر اندازهٔ

بزرگی بسیار کوچک‌تر از فرکانس‌های پایـانی سیسـتم می‌باشند. درضمن در بعضی از فرکانس‌های خاص، بـا درنظر گرفتن اثرات ژیروسکوپی افزایش بسیار انـدکی در فرکانس طبیعی سیستم مشاهده می‌شود.

شکل‌های (۱۰–۵) مقادیر جـذر میـانگین مربعـات دامنهٔ ارتعاشات در جهات مختلف را برای یـک جفـت چرخ‌دندهٔ دومارپیچ نشـان مـی‌دهـد. بـا مشـاهدهٔ ایـن نمودارها نتایج زیر استخراج می‌گردد:

- مقـادیر مـاکزیمم جـذر میـانگین مربعـات دامنـهٔ ارتعاشــات در جهــات مختلــف، متناســب بــا فرکانس‌هـای طبیعـی سیسـتم یـا ضـریبی از آنهـا می‌باشند که توسط هارمونیـک lام نیـرو، تحریـک می‌گردند.

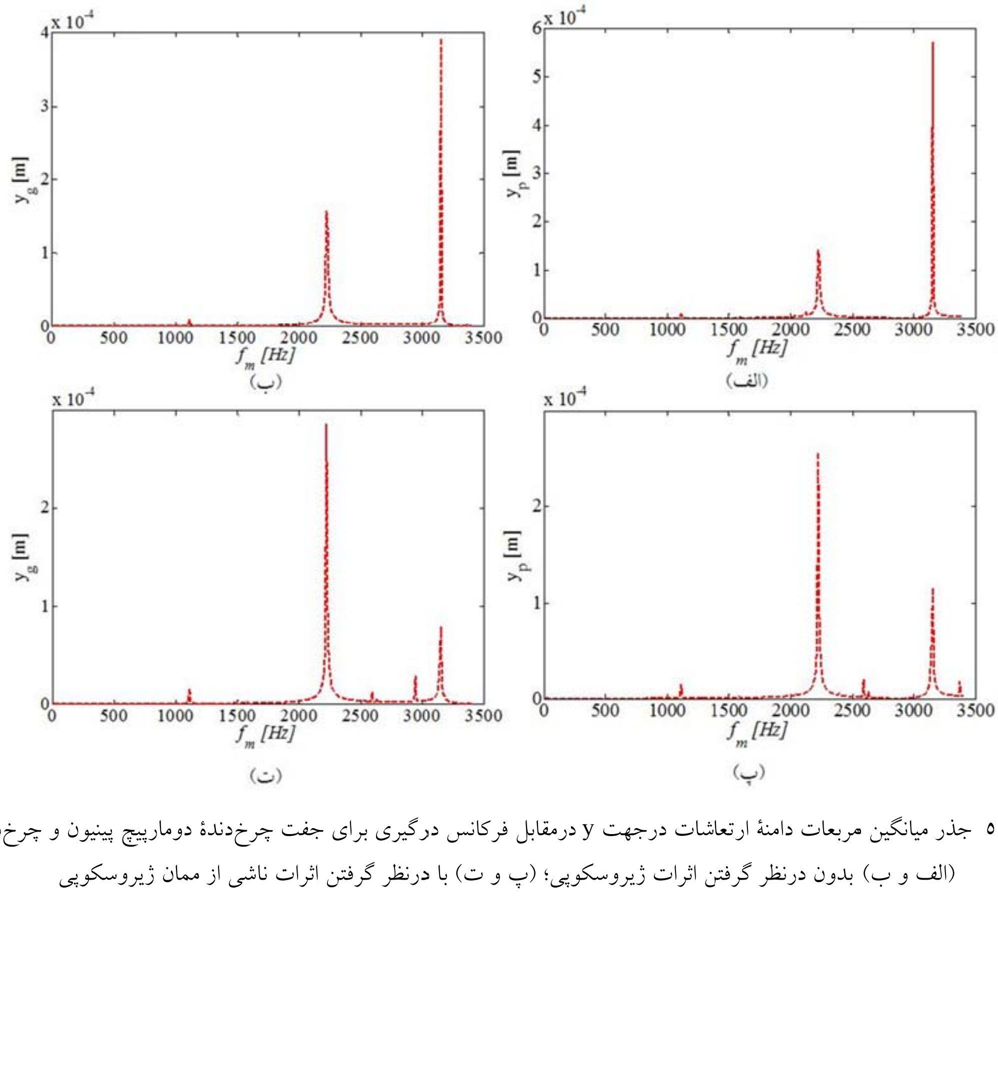
جدول ۳ مقایسهٔ فرکانس‌های طبیعی سیستم در حالت‌های مختلف

شمارهٔ فرکانس طبیعی	فرکانس طبیعی (Hz)		
	بدون درنظر گرفتن اثرات ناشی از ممان ژیروسکوپی	با درنظر گرفتن اثرات ناشی از ممان ژیروسکوپی	درصد اختلاف دو حالت
۱	۰/۱۴۵۵۳۱۷۳	۰	-
۲	۲۰۱۱/۸۵۷۳۵۲۸	۲۰۱۱/۷۴۰۷۴	۰/۰۰۶٪
۳	۲۲۲۴/۷۸۳۹۰۹	۲۲۲۲/۶۱۷۲۸۷	۰/۱٪
۴	۲۲۷۳/۸۵۴۴۸۶	۲۲۷۳/۷۸۸۷۴۳	۰/۰۰۳٪
۵	۲۶۳۳/۵۳۵۰۵۳	۲۶۳۰/۱۳۶۰۳۷	۰/۱۳٪
۶	۲۹۴۱/۸۹۴۲۹۸	۲۹۳۸/۷۲۳۱۵۸	۰/۱۱٪
۷	۳۱۴۹/۳۰۵۶۳۶	۳۱۴۶/۶۰۹۴۱۸	۰/۰۹٪
۸	۳۳۵۸/۸۱۴۲۰۸	۳۱۶۳/۸۰۹۰۳۸	۵/۸٪
۹	۳۳۷۰/۶۷۳۲۰۶	۳۳۶۹/۲۵۶۴۰۵	۰/۰۴٪
۱۰	۳۵۸۳/۳۲۹۸۶۵	۳۶۸۹/۲۴۲۶۵	۲/۹۶٪
۱۱	۴۰۵۸/۷۹۱۳۹۹	۳۹۵۵/۴۰۲۶۳۹	۲/۵٪
۱۲	۴۲۴۳/۷۰۴۶۵۲	۴۰۸۵/۹۵۷۹۹۴	۳/۷٪
۱۳	۴۲۹۹/۸۶۴۸۲۶	۴۵۵۲/۴۱۶۲۰۱	۵/۹٪
۱۴	۴۶۸۳/۰۸۸۴۷۱	۴۷۷۵/۰۶۹۲۸۱	۱/۹۶٪
۱۵	۵۳۰۴/۹۸۷۷۸۱	۵۱۷۹/۹۲۹۴۳۵	۲/۳۶٪
۱۶	۵۶۴۶/۶۷۸۹۹۲	۵۹۰۷/۷۶۸۹۲	۴/۶۲٪
۱۷	۱۵۶۳۹/۱۱۴۷۳	۱۵۶۴۴/۳۱۵۴۶	۰/۰۳٪
۱۸	۱۷۳۲۰/۱۵۹۳۲	۱۷۲۳۱/۲۷۵۸۴	۰/۰۰۶٪
۱۹	۱۹۴۸۱/۸۰۹۳۲	۱۹۴۸۶/۷۲۱۷۸	۰/۰۲۵٪
۲۰	۲۰۲۰۸/۶۶۹۶۸	۲۰۲۰۸/۷۰۹۹۷	۰/۰۰۰۲٪
۲۱	۲۱۳۶۴/۹۵۳۶۲	۲۱۳۶۹/۲۸۰۶۱	۰/۰۲٪
۲۲	۲۱۴۴۳/۴۷۷۴۳	۲۱۴۴۵/۴۲۴	۰/۰۰۹٪
۲۳	۲۳۳۴۰/۱۹۱۰۶	۲۳۳۴۱/۸۹۵۲۶	۰/۰۰۷٪
۲۴	۲۶۳۰۲/۶۴۸۰۸	۲۶۳۰۷/۳۷۶۷۶	۰/۰۱۸٪
۲۵	۵۲۵۷۳/۱۸۹۷۸	۵۲۵۷۳/۱۹۲۹۶	۰٪
۲۶	۵۶۱۱۳/۶۸۵۷۱	۵۶۱۱۰/۶۷۳۹۴	۰/۰۰۵٪
۲۷	۵۶۱۲۴/۶۵۵۹۶	۵۶۱۲۷/۸۷۳۷۹	۰/۰۰۶٪
۲۸	۶۰۲۵۳/۹۹۶۸۶	۶۰۲۵۳/۹۹۹۵۶	۰٪
۲۹	۶۴۲۹۵/۱۰۵۸	۶۴۲۹۱/۷۹۱۳۹	۰/۰۰۵٪
۳۰	۶۴۳۰۹/۳۸۱۶۵	۶۴۳۱۲/۹۱۹۲۹	۰/۰۰۵٪
۳۱	۱۲۵۴۹۸/۳۳۶۴	۱۲۵۴۹۷/۵۳۳۴	۰/۰۰۰۶٪
۳۲	۱۲۵۴۹۹/۳۷۰۹	۱۲۵۵۰۰/۱۹۱۱	۰/۰۰۰۷٪
۳۳	۱۴۴۱۵۷/۵۶۱	۱۴۴۱۵۶/۶۱۳۴	۰/۰۰۰۷٪
۳۴	۱۴۴۱۵۸/۷۸۱۷	۱۴۴۱۵۶/۷۴۷۴	۰/۰۰۰۷٪
۳۵	۳۵۴۹۸۴/۰۴۸۶	۳۵۹۸۴/۰۴۸۶	۰
۳۶	۳۸۹۶۴۵/۲۸۹۶	۳۸۹۶۴۵/۲۸۹۶	۰

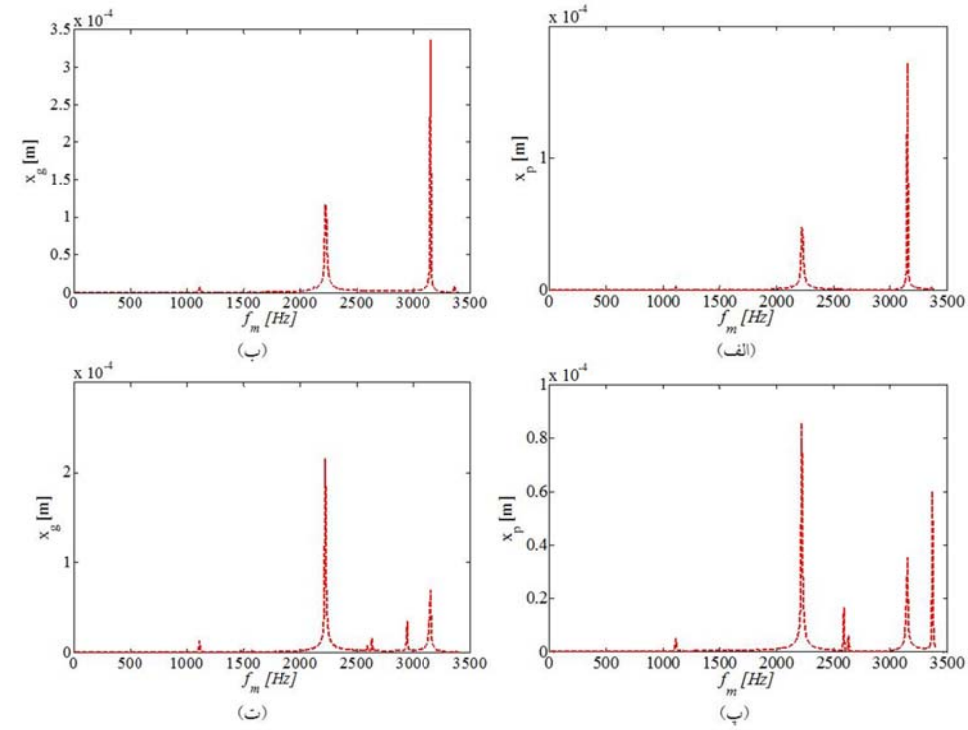
- درنظـر گـرفتن اثـرات ژیروسـکوپی در بعضـی از جهات تغییرات قابل‌توجهی را در پاسخ دینـامیکی سیستم و همچنین در تعداد قله‌های ارتعاشـات در محدودهٔ فرکانس درگیری ایجاد می‌کنـد. زیـرا در حالتی که اثرات ژیروسـکوپی در سیسـتم درنظـر گرفته مـی‌شـود، مـاتریس ژیروسـکوپی کـه یـک ماتریس وابسته به سـرعت مـی‌باشـد بـه سیسـتم افزوده می‌شود. این در حالی است که اگـر اثـرات ژیروســکوپی نادیــده گرفتــه شــوند، تمــامی ماتریس‌های مربوط به معادلهٔ کلی سیستم مسـتقل از سرعت و ثابت می‌باشند.
- درنظـر گـرفتن اثـرات ژیروسـکوپی میـزان دامنـهٔ ارتعاشات در پاسخ دینـامیکی را تغییـر مـی‌دهـد، به‌گونه‌ای که در سه جهـت x، y و θ_x درنظـر

گرفتن اثـرات ژیروسـکوپی باعـث کـاهش دامنـهٔ پاسخ دینامیکی سیستم می‌شود. این در حالی است کـه در جهـات دیگـر درنظـر گـرفتن اثـرات ژیروسکوپی دامنهٔ ارتعاشات را افزایش می‌دهد. از آنجایی کـه مـاتریس ژیروسـکوپی یـک مـاتریس پادمتقـارن مـی‌باشـد، مـی‌تـوان ایـن موضـوع را این‌گونه توجیه کرد که درجهت‌هایی که با درنظـر گرفتن اثرات ژیروسکوپی کاهش در دامنـهٔ پاسـخ دینامیکی مشاهده می‌شود، این ماتریس شبیه یـک میراکننده عمل می‌کند؛ اما درجهت‌هایی که درنظر گرفتن اثرات ژیروسکوپی باعث افزایش در دامنـهٔ پاسخ دینامیکی شده است، این ماتریس شبیه یـک تحریک عمل کرده است.

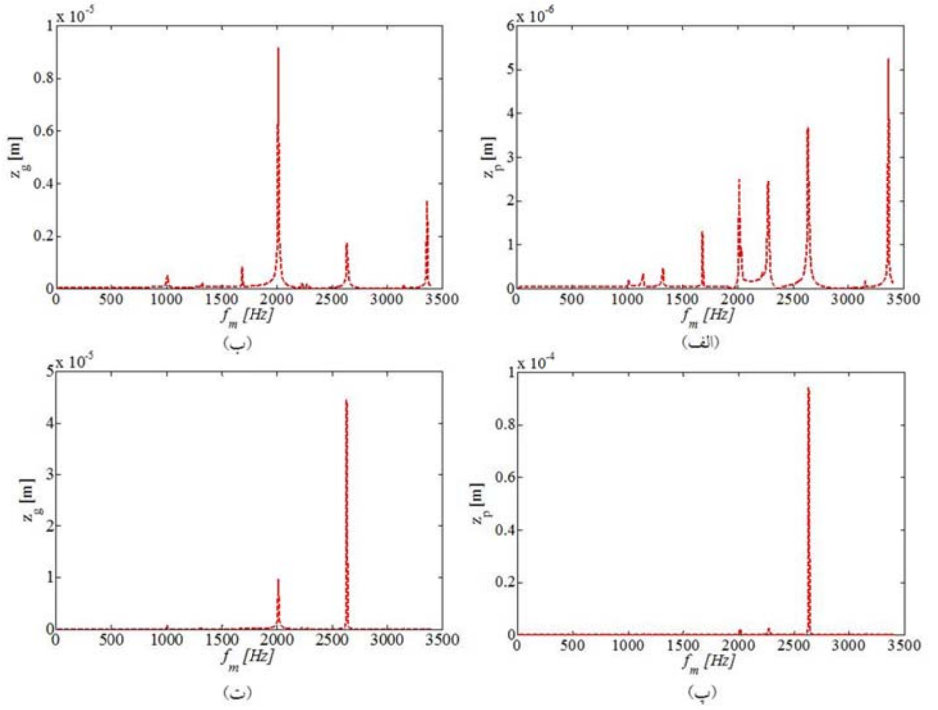
نتایج بالا نشان می‌دهد که اثـرات ژیروسـکوپی در سرعت‌های بالا برروی دینامیک یک جفت چـرخ‌دنـدهٔ دومارپیچ تأثیر قابل‌ملاحظه‌ای داشـته اسـت و بایسـتی حتماً در سیستم‌های چرخ‌دنـده‌ای سـرعت‌بـالا درنظـر گرفته شوند.



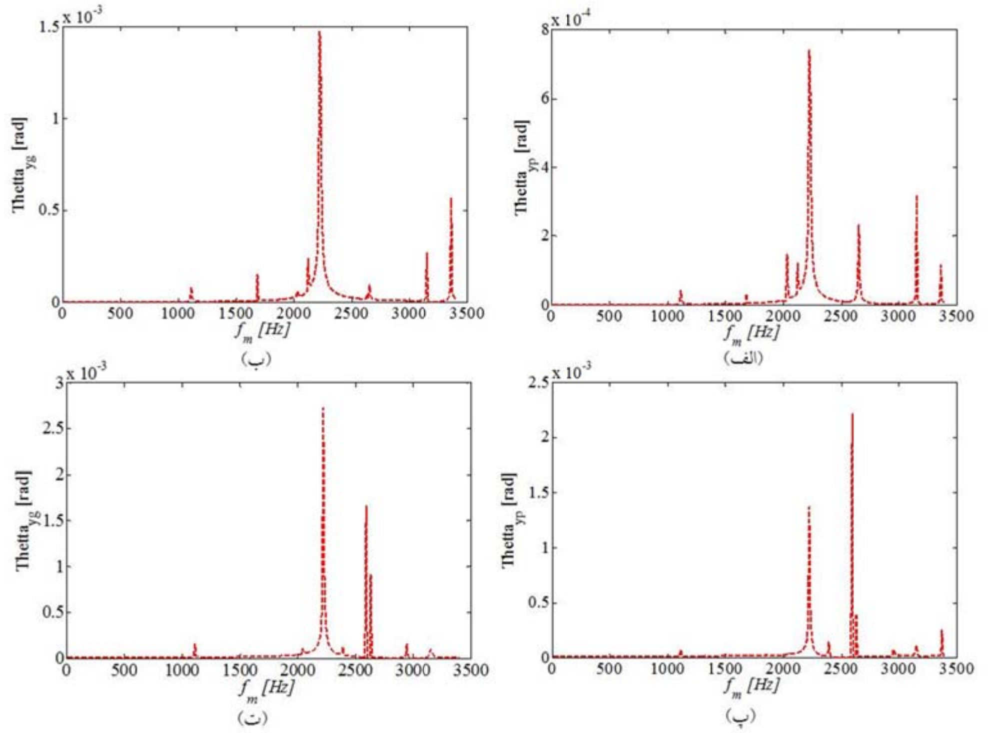
شکل ۵ جذر میانگین مربعات دامنهٔ ارتعاشات درجهت y درمقابل فرکانس درگیری برای جفت چرخ‌دندهٔ دومارپیچ پینیون و چرخ‌دندهٔ (الف و ب) بدون درنظر گرفتن اثرات ژیروسکوپی؛ (پ و ت) با درنظر گرفتن اثرات ناشی از ممان ژیروسکوپی



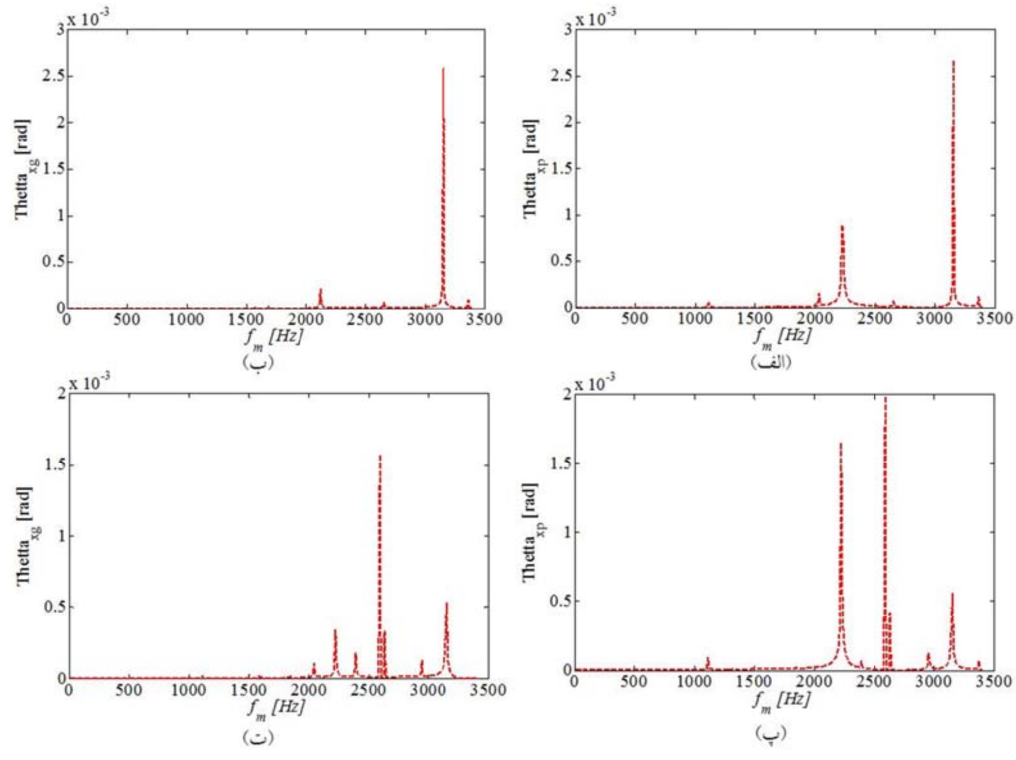
شکل ٦ جذر میانگین مربعات دامنهٔ ارتعاشات درجهت x درمقابل فرکانس درگیری برای جفت چرخ‌دندهٔ دومارپیچ پینیون و چرخ‌دندهٔ (الف و ب) بدون درنظر گرفتن اثرات ژیروسکوپی (پ و ت) با درنظر گرفتن اثرات ناشی از ممان ژیروسکوپی



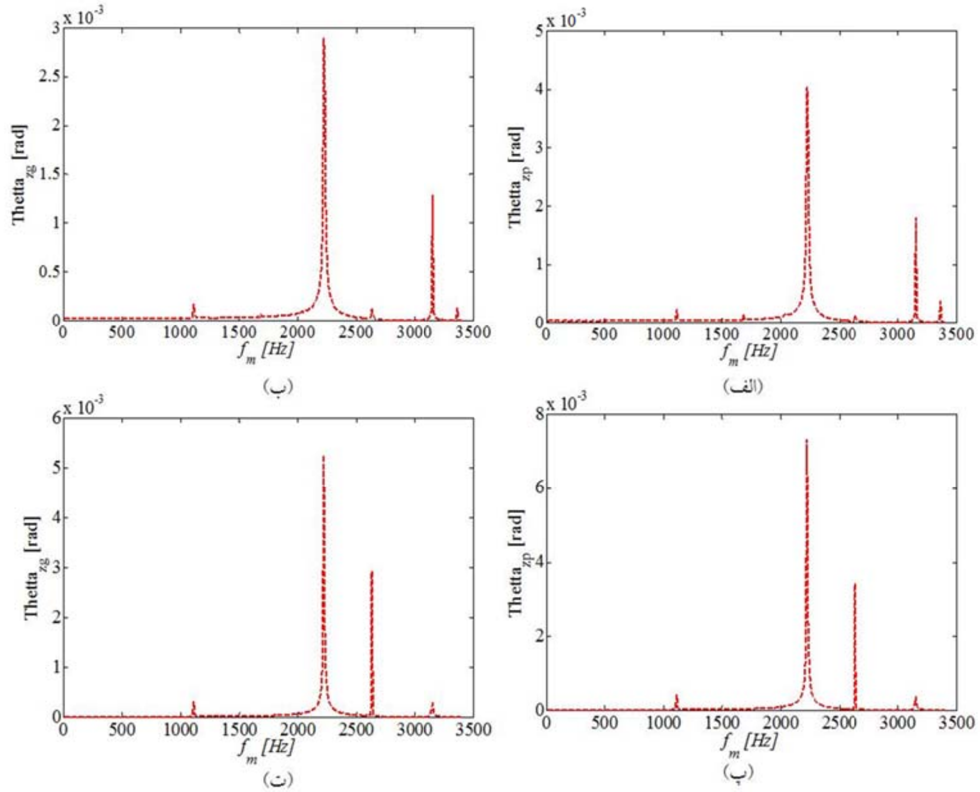
شکل ۷ جذر میانگین مربعات دامنهٔ ارتعاشات درجهت z درمقابل فرکانس درگیری برای جفت چرخ‌دندهٔ دومارپیچ پینیون و چرخ‌دندهٔ (الف و ب) بدون درنظر گرفتن اثرات ژیروسکوپی، (پ و ت) با درنظر گرفتن اثرات ناشی از ممان ژیروسکوپی



شکل ۸ جذر میانگین مربعات دامنهٔ ارتعاشات درجهت θ_y درمقابل فرکانس درگیری برای جفت چرخ‌دندهٔ دومارپیچ پینیون و چرخ‌دندهٔ (الف و ب) بدون درنظر گرفتن اثرات ژیروسکوپی (پ و ت) با درنظر گرفتن اثرات ناشی از ممان ژیروسکوپی



شکل ۹ جذر میانگین مربعات دامنهٔ ارتعاشات درجهت θ_x درمقابل فرکانس درگیری برای جفت چرخ‌دندهٔ دومارپیچ پینیون و چرخ‌دندهٔ (الف و ب) بدون درنظر گرفتن اثرات ژیروسکوپی، (پ و ت) با درنظر گرفتن اثرات ناشی از ممان ژیروسکوپی



شکل ۱۰ جذر میانگین مربعات دامنهٔ ارتعاشات درجهت θ_z درمقابل فرکانس درگیری برای جفت چرخ‌دندهٔ دومارپیچ پینیون و چرخ‌دندهٔ (الف و ب) بدون درنظر گرفتن اثرات ژیروسکوپی (پ و ت) با درنظر گرفتن اثرات ناشی از ممان ژیروسکوپی

نتیجه گیری

در این تحقیق با ارائهٔ یک مدل خطی مستقل از زمان در فضای سه‌بعدی به بررسی اثرات ناشی از ممان ژیروسکوپی برروی دینامیک و ارتعاشات یک جفت چرخ‌دندهٔ دومارپیچ پرداخته شده است. نتایج این تحقیق نشان می‌دهد که با درنظر گرفتن اثرات ژیروسکوپی در یک جفت چرخ‌دنده دومارپیچ، بیشتر فرکانس‌های طبیعی سیستم کاهش می‌یابد. البته درصد کاهش در فرکانس‌های طبیعی اولیهٔ سیستم بیشتر است و با افزایش مقدار فرکانس طبیعی، این درصد کمتر می‌شود. زیرا فرکانس‌های طبیعی اولیهٔ سیستم ازنظر اندازهٔ بزرگی بسیار کوچک‌تر از فرکانس‌های پایانی سیستم می‌باشند. درضمن، در حالتی که اثرات ژیروسکوپی درنظر گرفته می‌شود، پاسخ دینامیکی سیستم به‌سرعت چرخ‌دنده‌های درگیر حساس می‌باشد. زیرا در این حالت ماتریس ژیروسکوپی وارد معادلات حرکت می‌شود و با تغییر سرعت چرخ‌دنده‌های درگیر تغییر خواهد کرد؛ اما درحالتی‌که از اثرات ژیروسکوپی صرف‌نظر می‌شود، با تغییر سرعت چرخ‌دنده‌های درگیر هیچ تغییری در ماتریس‌ها مشاهده نخواهد شد و ماتریس‌ها مستقل از سرعت چرخ‌دنده‌های درگیر می‌باشند.

مراجع

1. Kahraman, A. and Singh, R., "Non-linear dynamics of a spur gear pair", *Journal of sound and Vibration*, Vol. 142, No. 1, pp. 49-75, (1990):
2. Kahraman, A. and Blankenship, G.W., "Interactions between commensurate parametric and forcing excitations in a system with clearance", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 194, No. 3, pp. 317-336, (1996).
3. Blankenship, G.W. and Kahraman, A., "Steady state forced response of a mechanical oscillator with combined parametric excitation and clearance type non-linearity", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 185, No.5, pp. 743-765, (1995).
4. Kahraman, A. and Blankenship, G.W., "Experiments on nonlinear dynamic behavior of an oscillator with clearance and periodically time-varying parameters", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 64, No.1, pp. 217-226, (1997).
5. Kahraman, A. and Blankenship., G.W., "Effect of involute tip relief on dynamic response of spur gear pairs", *Journal of Mechanical Design*, Vol. 121, No. 2, pp. 313-315, (1999).
6. Kahraman, A. and Blankenship, G.W., "Effect of involute contact ratio on spur gear dynamics", *Journal of Mechanical Design*, Vol. 121, No. 1, pp. 112-118, (1999).
7. Neriya, S.V., Bhat, R.B. and Sankar., T.S., "On the dynamic response of a helical geared system subjected to a static transmission error in the form of deterministic and filtered white noise inputs", *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, Vol. 110, No. 4, pp. 501-506, (1988).
8. Kahraman, A., "Effect of axial vibrations on the dynamics of a helical gear pair", *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 115, No. 1, pp. 33-39, (1993).
9. Kahraman, A., "Dynamic analysis of a multi-mesh helical gear train", *Journal of Mechanical Design*, Vol. 116, No. 3, pp. 706-712, (1994).
10. Kahraman, A. "Planetary gear train dynamics", *Journal of Mechanical design* ,Vol. 116, No. 3, pp. 713-720, (1994).
11. Umezawa, K., Houjoh, H., Matsumura, S., Wang, S. and Ohshima, S., "'Experimental Investigation on Modal Behavior of Helical Gear Units with Various Ratio", *Proc. 7th ASME Int. Power Trans. and Gearing Conference*, San Diego, pp. 509-518, 6- 9 October, (1996).
12. Kubur, M., Kahraman, A., Zini, D.M. and Kienzle, K., "Dynamic analysis of a multi-shaft helical gear transmission by finite elements: model and experiment", *Journal of vibration and acoustics*, Vol. 126, No. 3, pp. 398-406, (2004).
13. Kang, M.R. and Kahraman, A., "An experimental and theoretical study of the dynamic behavior of double-helical gear sets", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 350, pp. 11-29, (2015).
14. Prashant, S. and Kahraman, A. "A dynamic model of a double-helical planetary gear set", *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 70, pp. 157-174, (2013).
15. Thomas, J., "A procedure for predicting the load distribution and transmission error characteristics of double helical gears", MSc Thesis, The Ohio State University, (1991).
16. Clapper, M. and Houser, D.R., "Prediction of fully reversed stresses at the base of the root in spur and double helical gears in a split torque helicopter transmission", *Proceedings of American Helicopter Society Rotor Wing Specialists Meeting*, Williamsburg, VA, pp. 26-28, (1993).
17. Zhang, T., "Noise optimization of a double helical parallel shaft gearbox", *Proceedings of the Int. Gearing Conf.*, University of Newcastle upon Tyne, pp. 93-98, (1994).

18. Wang, Ch. and Hai-tao, J., "Investigation of a design modification for double helical gears reducing vibration and noise", *Journal of Marine Science and Application*, Vol. 9, No. 1, pp. 81-86, (2010).
19. Wang, S., Zhang C. and Wang, F., "The analysis of dynamic load coefficients of double- helical planetary gear sets", *International gear conference*, France, pp. 888- 895, 26- 28 August, (2014).
20. Sheng, Zh., "Modal Analysis of Double-Helical Planetary Gears With Numerical and Analytical Approach", *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 137, No. 4, pp. 1-17, (2015).
21. Seager, D.L. "Conditions for the Neutralization of Excitation by the Teeth in Epicyclic Gearing", *Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 17, No. 5, pp. 293-299, (1975).
22. Kubur, M., "Dynamic analysis of a multi-shaft helical gear transmission by finite elements: model and experiment", *Journal of vibration and acoustics*, Vol. 126, No. 3, pp. 398-406, (2004).
23. Kang, M.,R., and Kahraman, A., "Measurement of vibratory motions of gears supported by compliant shafts", *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 29, pp. 391-403, (2012).
24. Ajmi, M. and Velex, P., "A model for simulating the quasi-static and dynamic behaviour of solid wide-faced spur and helical gears", *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 40, No. 2, pp. 173-190, (2005).
25. LDP Gear Load Distribution Program, Gear and Power Transmission Research Laboratory, the Ohio State University, USA, (2011).
26. Meirovitch, L., "*Fundamentals of vibrations*", International Edition, McGraw-Hill, pp. 280-365, (2001).